Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I - Lista de Exercícios

Questão 1: Dois objetos de massa M estão situados em um plano cartesiano, respectivamente nas coordenadas $(1,0)$ e $(-1,0)$. Mostre que a atração gravitacional exercida por esses dois objetos sobre um corpo de massa m situado na coordenada $(0,d)$ pode ser aproximada, para grandes valores de d, pela atração que seria exercida por um único objeto de massa $2M$ situado na origem do sistema de coordenadas.

Observação: A força de atração gravitacional entre dois objetos, respectivamente de massa M e m, separados por uma distância R, é dada por:

$$F = G \cdot \frac{M.m}{R^2}$$

Questão 2: Uma esfera metálica de volume 1 litro e massa 3 kg encontra-se imersa na água de uma piscina, a 3 m do fundo da mesma. A esfera é solta, com velocidade nula ($v = 0$), no instante $t = 0$. Ao se mover na água, a esfera sofrerá uma força de atrito dada por:

$$F_a = -10.v$$

Encontre a expressão da posição da esfera como função do tempo. (Suponha a acelaração da gravidade igual a $g = 10m/s^2$).

Questão 3: Uma lata cilíndrica, com base circular, servirá para acondicionar um produto alimentício. Suponha que o material de que é feita a embalagem pesa $1,0\,g/cm^2$, e que a embalagem deverá pesar exatamente $50\,g$. Quais deverão ser o raio da base e altura da lata para maximizar o volume da mesma? Qual é valor desse volume máximo?

Questão 4: Um nadador consegue nadar à velocidade de 2 m/s (velocidade em relação à água), e andar no chão à velocidade de 5 m/s. Ele irá atravessar um rio cujas margens são dadas pelas retas $y = 0$ e $y = 50$, devendo sair do ponto $(0,0)$ e chegar no ponto $(0,50)$, situado na outra margem. Se a correnteza do rio é tal que a água se move à velocidade de 1 m/s no sentido positivo do eixo dos x, em qual ponto da margem oposta o nadador deverá chegar nadando, para então seguir a pé até o destino, de forma a atingir o destino no menor tempo possível?

Questão 5: Considere um tanque de água gerado pela revolução da parábola $y = x^2$ ao redor do eixo dos y. A água escoa por um furo na base do tanque, a uma taxa de escoamento dada por:

$$\frac{dv}{dt} = 3h(t)$$

sendo $h(t)$ a altura da coluna d'água, e $v(t)$ o volume total de líquido escoado. Essa água cai em outro tanque, idêntico ao primeiro, situado abaixo deste. Se a altura inicial da coluna d'água no tanque de cima for de 1 m, e no tanque de baixo for de 0, escreva a expressão da altura da coluna d'água no tanque de baixo como função do tempo. Tanto no tanque de cima quanto no de baixo, a altura da coluna d'água é medida em relação ao fundo do próprio tanque.

Questão 6: Um objeto esférico de massa $M = 2kg$ encontra-se imerso em um tanque contendo água, movendo-se com velocidade inicial de $2m/s$ na direção horizontal. A força de atrito do objeto com a água, representada pelo vetor f_a, é dada pela expressão: $f_a = -5v$, sendo v o vetor velocidade. A força resultante da soma da força peso com a força de empuxo do objeto na água é de $10N$. Calcule:

(a) A distância máxima horizontal que o objeto poderá percorrer.

(b) A velocidade máxima que o objeto poderá atingir em toda a sua trajetória.

Questão 7: Dois recipientes são construídos com pesos idênticos, sendo o lado de dentro do recipiente A correspondente à revolução, ao redor do eixo dos y, da função $y = x^2$, e o lado de dentro do recipiente B dado pela revolução, ao redor do eixo dos y, da função $y = x$ (para $x \geq 0$).

(a) Suponha que os recipientes são colocados nos dois pratos de uma balança. Se o recipiente A tem água até a altura de 1,0, qual deverá ser a altura de água no recipiente B para que a balança fique em equilíbrio?

(b) Suponha agora que uma mangueira interliga os recipientes, ligando orifícios situados nos respectivos fundos. Com os recipientes nos pratos da balança, determine a altura da coluna d'água nos recipientes para que a balança fique em equilíbrio.

Questão 8: Um tanque cuja capacidade é de 100 litros encontra-se cheio no instante inicial, contendo água misturada com 1 kg de sal. No instante inicial, começa a ser introduzida água pura no tanque, por uma válvula, à taxa de 1 litro por hora, sendo que por outra válvula é retirada igual quantidade de líquido, ou seja, também 1 litro de mistura sendo retirado por hora. Após quanto tempo o tanque passará a conter apenas 0,5 kg de sal? (Suponha que a mistura é sempre mantida homogênea no interior do tanque).

Questão 9: Uma loja retangular tem 100 m^2 de área. A frente dessa loja é de vidro, e as demais paredes são de tijolo, tendo as quatro paredes a mesma altura. O metro quadrado da parede de vidro custa o dobro do preço do metro quadrado da parede de tijolos. Quais dimensões da loja minimizarão o custo total do material usado nessas quatro paredes?

Questão 10: Um avião segue uma trajetória que pode ser descrita pela curva:

$$y = x^3 - x.$$

O avião se move no sentido em que a coordenada x diminui ao longo do tempo. No nariz desse avião há uma câmera que aponta exatamente para a frente. Supondo que a câmera esteja apontando sempre para a direção tangente à trajetória do avião, determine em quais pontos da curva a câmera estará apontando para os pontos de coordenadas $P_1 = (0, -1)$ e $P_2 = (-2, 0)$.