Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I

Pequenos Erros que Causam Grandes Dificuldades

Conteúdo

Temos notado que a maior dificuldade que alguns alunos têm encontrado não diz respeito ao conteúdo de Cálculo I, mas sim a uma certa falta de firmeza com conteúdos anteriores. Este texto tem o objetivo de indicar alguns dos erros mais frequentes. Sugerimos fortemente que os alunos passem os olhos pelos diversos itens, pois mesmo aqueles que parecem muito simples podem causar dificuldade, se o aluno apenas o "souber" sem ter a completa segurança daquilo que está fazendo.

1 Dificuldades com Frações

Uma dificuldade das mais recorrentes tem sido a manipulação de frações.

1.1 Simplificação de termos comuns do numerador e denominador

Uma operação importante, ao se lidar com frações, é a simplificação de termos comuns presentes no numerador e no denominador. A operação, feita corretamente, tem a seguinte aparência:

$$\frac{ab+ac}{ap+aq} \rightarrow \frac{a(b+c)}{a(p+q)} \rightarrow \frac{b+c}{p+q}$$

Ou seja, a operação correta envolve:

- Colocar em evidência o termo comum, tanto no numerador quanto no denominador;
- Quando tivermos um mesmo termo multiplicando *todo o numerador* e também *todo o denominador*, podemos cancelar esse termo, o que é o mesmo que substituir a fração $\frac{a}{a}$ por 1.

Os seguintes dois casos particulares da mesma situação ocorrem também com frequência:

$$\frac{ab+ac}{ap} \rightarrow \frac{a(b+c)}{ap} \rightarrow \frac{b+c}{p}$$

$$\frac{ab}{ap+aq} \rightarrow \frac{ab}{a(p+q)} \rightarrow \frac{b}{p+q}$$

Alguns erros que têm aparecido com surpreendente frequência nos "testes" de Cálculo I são discutidos a seguir. A lógica da apresentação a seguir é a de mostrar a estrutura do erro, e depois apresentar um exemplo numérico que ilustre a falsidade da fórmula errada. O aluno que tiver dúvidas, deve examinar atentamente o exemplo numérico até ficar convencido de que a fórmula errada de fato está errada.

1.1.1 Erro 1:

O erro mais frequente tem sido a tentativa do aluno para cancelar uma constante que está presente em apenas um termo do numerador com essa mesma constante no denominador:

$$\frac{ab+c}{ad} \not\rightarrow \frac{b+c}{d}$$

O aluno deve observar o que ocorreria quando usamos números:

$$\frac{2\times 5+1}{2\times 3} \not\rightarrow \frac{5+1}{3}$$

Deve ficar claro que a expressão à esquerda vale $\frac{11}{6}$, enquanto a expressão à direita vale 2, e que, portanto, elas não são iguais.

1.1.2 Erro 2:

O mesmo erro anterior aparece às vezes de forma mais escondida, com a seguinte forma:

$$\frac{a^{-1}b+c}{d} \not\rightarrow \frac{b+c}{ad}$$

Ou seja, o aluno pega um termo que está dividindo apenas um dos termos do numerador, e passa esse termo para o denominador, dividindo portanto todo o numerador. Observe-se o que ocorre com números:

$$\frac{2^{-1}\times 4+1}{3} \not\rightarrow \frac{4+1}{2\times 3}$$

O termo à esquerda resulta em 1, enquanto o termo à direita resulta em $\frac{5}{6}$, o que mostra que as expressões não são iguais.

1.1.3 Erro 3:

Um erro parecido com esse tem a seguinte forma:

$$\frac{ab+ac}{a^2} \rightarrow \frac{ab+ac}{a.a} \not\rightarrow b+c$$

O aluno aqui, imaginativamente, distribuiu o termo a^2 em $a.a$ (até aí nenhum problema), e depois cancelou cada um dos a com um dos a que multiplicavam cada um dos termos do numerador (essa operação causou o erro). Fazendo com números, deve-se observar o que ocorreria:

$$\frac{2\times 3+2\times 5}{2^2} \rightarrow \frac{2\times 3+2\times 5}{2\times 2} \not\rightarrow 3+5$$

Deve-se observar que a expressão mais à esquerda vale 4, enquanto a expressão mais à direita vale 8. A forma correta de proceder seria:

$$\frac{ab+ac}{a^2} \rightarrow \frac{a(b+c)}{a.a} \rightarrow \frac{b+c}{a}$$

1.1.4 Erro 4:

Por fim, também tem aparecido o seguinte erro:

$$\frac{a^2}{b^2} \not\to \frac{a}{b}$$

Aqui, o aluno se confundiu com a operação de simplificar um termo do numerador com outro do denominador, que vale para termos que multiplicam tanto o numerador quanto o denominador, e pensou que a operação também valesse para simplificar potências. Veja-se o que ocorre quando fazemos a operação com números:

$$\frac{3^2}{2^2} \not\to \frac{3}{2}$$

A expressão à direita vale $\frac{9}{4}$, enquanto a expressão à esquerda vale $\frac{3}{2}$.

1.2 Divisão de fração por fração

A seguinte operação tem sido um pesadelo para vários alunos:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Os alunos muitas vezes ficam confusos, sem saber a ordem na qual as operações devem ser executadas. Chamamos a atenção para o fato de que essa notação significa a seguinte sequência de operações:

- Dividir a por b;
- Depois dividir c por d;
- Finalmente, dividindo o resultado da operação $\frac{a}{b}$ pelo resultado da operação $\frac{c}{d}$.

O resultado pode ficar completamente errado quando o aluno aplica operações em ordem aleatória, por exemplo dividindo a por b, depois o resultado por c e finalmente o resultado por d (se você estiver em dúvida quanto a isso, faça um teste usando números e veja como fica diferente o resultado).

A regra para se resolver problemas assim é:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \to \frac{a}{b}.\frac{d}{c}$$

Muitas vezes os alunos ficam confusos quando a operação é mais simples, de uma das formas:

$$\frac{a}{\frac{c}{d}}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}$$

Para evitar confusão, pode-se escrever a operação no formato anterior:

$$\frac{a}{\frac{c}{d}} \rightarrow \frac{\dfrac{a}{1}}{\dfrac{c}{d}} \rightarrow \frac{a}{1}.\frac{d}{c} \rightarrow \frac{a.d}{c}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} \rightarrow \frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{1}} \rightarrow \frac{a}{b}.\frac{1}{c} \rightarrow \frac{a}{b.c}$$

2 Dificuldades com Desigualdades (Expressões envolvendo os sinais $>$, $<$, $\geq$, $\leq$)

Muitas vezes é necessário analisar o sinal de uma expressão, ou seja, descobrir para quais valores de x essa expressão fica positiva, para quais fica negativa, e para quais fica igual a zero. Muitos alunos simplesmente não entendem o que está sendo pedido, nessas situações. Examinemos um caso, passo a passo. A questão abaixo apareceu em um teste recente:

Questão: Determine os valores de x que satisfazem a **desigualdade**:

$$-2x^2 + 10x - 12 \geq 0$$

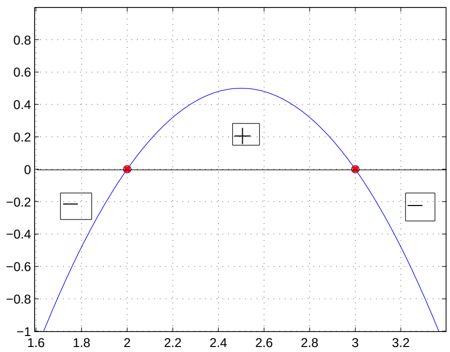
O aluno, muitas vezes, olha para expressão, e nota uma semelhança com essa outra expressão: $-2x^2 + 10x - 12 = 0$, que é mais comum (pelo menos no ensino médio). Essa outra expressão é uma **equação do segundo grau**, e pode ser resolvida pela clássica fórmula das raízes de equações do segundo grau. Não sabendo o que fazer, no caso da expressão da desigualdade, ou simplesmente não notando que as duas coisas são diferentes, o aluno tenta lançar como resposta as raízes da equação de segundo grau, e evidentemente erra a questão.

Examinemos, primeiro, por quê a **desigualdade** acima é diferente da **equação** acima:

- Na desigualdade, queremos saber para quais valores de x a expressão $(-2x^2 + 10x - 12)$ fica **maior ou igual** a zero.

- Na equação, queremos saber para quais valores de x a expressão $(-2x^2 + 10x - 12)$ fica **igual** a zero.

Para resolver a questão, notamos que sabemos muitas coisas sobre o gráfico dos valores da expressão $(-2x^2 + 10x - 12)$. Sabemos, por exemplo, que esse gráfico será uma parábola (pois expressões que são polinômios do segundo grau têm sempre o gráfico na forma de uma parábola), e que essa parábola será virada para baixo (ou seja terá um ponto de máximo, e não de mínimo), pois o coeficiente do termo x^2 é negativo. A figura abaixo mostra o gráfico dessa parábola, que cruza o eixo dos x exatamente nas raízes, ou seja, em $x = 2$ e $x = 3$:



O aluno deve ser capaz de desenhar esse gráfico, com seus principais elementos qualitativos (se a parábola está virada para cima ou para baixo, e onde ela corta o eixo dos x), a partir das informações, já encontradas, dos valores das raízes da expressão e do sinal do coeficiente de x^2.

Por esse gráfico, deve ficar claro que a expressão é negativa para todo $x < 2$ e todo $x > 3$, e positiva para todo x pertencente ao intervalo $2 < x < 3$.

Finalmente, deve-se notar que o enunciado pede os valores de x para os quais a expressão fica maior **ou igual** a zero. Assim, a resposta é:

$$-2x^2 + 10x - 12 \geq 0 \text{ para todo } x \text{ no intervalo } 2 \leq x \leq 3$$

3 Dificuldades com Parêntesis e Hierarquia de Operadores

3.1 Usando parêntesis

O uso de parêntesis (ou colchetes) é importante sempre que uma operação for incidir sobre uma expressão inteira, ao invés de uma única variável ou constante. Assim, por exemplo, pode-se escrever:

$$\operatorname{sen} x$$

sem usar parêntesis. No entanto, se queremos tirar o seno de uma expressão maior, por exemplo $x^2 + 3x - 1$, é preciso escrever:

$$\operatorname{sen}(x^2 + 3x - 1)$$

Seria errado tentar representar o seno de $x^2 + 3x - 1$ da seguinte forma:

$$\operatorname{sen} x^2 + 3x - 1$$

pois o que ocorreria, neste caso, seria a função seno incidir apenas sobre o termo x^2.

3.2 Multiplicação envolvendo termo com sinal negativo

Um problema grave, que tem afetado até mesmo alunos que tiram boas notas nos testes, diz respeito à notação da operação de um produto envolvendo uma expressão com o sinal negativo. O aluno costuma pensar que as seguintes expressões são a mesma coisa:

$$a.(-b) \not\to a. - b \not\to a - b$$

A expressão à esquerda está correta, para expressar o produto de a com $-b$. A expressão central está mal formada. Não se deve escrever algo assim. A terceira expressão está completamente errada se o aluno queria representar o produto de a com $-b$; é claro que o que ele representou foi a diferença entre a e b.

3.3 Multiplicação por fração

Outro erro que tem sido comum tem a seguinte estrutura:

$$a\frac{b+c}{d} \not\to \frac{ab+c}{d}$$

O aluno, provavelmente por pressa, multiplica a constante que multiplica toda a fração apenas pelo primeiro termo do numerador, o que causa erro. A forma correta de proceder seria:

$$a\frac{b+c}{d} \to \frac{ab+ac}{d}$$

4 Encontrando Retas Tangentes a Curvas

Têm aparecido graves dificuldades em problemas de determinação de retas tangentes a curvas. Os alunos devem notar, em primeiro lugar, que quando se pede que seja encontrada uma *reta*, estamos procurando uma expressão do seguinte tipo:

$$y = ax + b$$

A tarefa se restringe, portanto, a determinar os valores das constantes a e b. Isso significa que expressões com estruturas tais como:

$$y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

$$y = \frac{1}{x+1}x + 2$$

$$y = \ln(x+1)x$$

constituem respostas completamente erradas para problemas de determinação de retas tangentes, a começar pelo fato destas não serem expressões de **retas**.

Há diversas variações possíveis para esse tipo de problema. O caso mais simples é aquele em que o enunciado pede uma reta que seja tangente a uma curva, tangenciando-a em um ponto específico pertencente à curva. O roteiro para se resolver uma situação assim é:

- O enunciado pede que seja encontrada uma reta tangente a uma curva $y = f(x)$, no ponto $P = (p, q)$. Verifique, inicialmente, se o ponto satisfaz à equação da curva, ou seja, se é verdade que $q = f(p)$.
- Se for verdade, o problema se restringe a encontrar a reta $y = ax + b$ que passa no ponto (p, q) cuja inclinação é igual a $f'(p)$.
- A constante a (que é a inclinação da reta) é dada por: $a = f'(p)$, ou seja, é o valor da função derivada de f, calculada no ponto $x = p$. Atenção: para achar $f'(p)$, primeiro encontre a função $f'(x)$ (a expressão da derivada de f) e então encontre $f'(p)$ (ou seja, substitua as ocorrências da variável x na expressão encontrada pelo valor p, encontrando um número, que significa a inclinação da reta tangente à curva **naquele ponto específico**).
- A constante b pode ser determinada usando-se a informação de que a reta passa no ponto (p, q). Ou seja: $q = a.p + b$. Como são conhecidos, neste ponto, os valores de p, q e a, pode-se calcular b como: $b = q - a.p$.

4.1 Exemplo

Para exemplificar esse roteiro, vamos resolver uma questão com o seguinte enunciado: Encontre a equação da reta tangente à curva $y = \ln(x + 1)$ no ponto $P = (0, 0)$.

Para iniciar a resolução, é preciso saber se o ponto $P = (0, 0)$ pertence ou não à curva $y = \ln(x+1)$. Substituindo $x = 0$, obtém-se: $y = \ln(0+1) = \ln(1) = 0$. Logo, o ponto P encontra-se sobre a curva.

Prosseguindo, temos então de encontrar os valores de a e b, para uma reta que passa pelo ponto $P = (0, 0)$, e cuja inclinação tem de ser tal que a reta tangencie a curva nesse ponto. Essa inclinação, portanto, tem de ser igual à derivada da função. Calculando a derivada:

$$f'(x) = \frac{d\ln(x+1)}{dx} = \frac{1}{x+1}$$

A derivada da função é uma expressão que depende de x. **Um erro muito comum dos alunos tem sido pensar que essa expressão é igual à inclinação da reta, ou seja, achar que a reta terá inclinação variável, tendo um valor de inclinação para cada valor de x. Se os alunos pensarem um pouco mais, poderão concluir que toda reta tem inclinação constante, que não pode mudar para cada valor de x.**

Como fazer então para achar o valor da inclinação da reta, se a derivada fornece um valor para cada valor diferente de x? Basta perceber que a reta tem de ter inclinação igual à derivada da função *no ponto em que ocorre a tangência* da reta à função. Ou seja, a inclinação da reta tangente é igual ao valor da derivada para $x = 0$, ou seja, para o x do ponto $(0, 0)$, no qual se pede que a reta seja tangente à curva. Então:

$$a = f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

Agora que temos o valor de a, falta achar b. Para isso, usamos o fato de que a reta deve passar no ponto $P = (0, 0)$:

$$y = ax + b$$

$$0 = a.0 + b$$

$$\Rightarrow\ b = 0$$

Tendo achado a e b, a expressão da reta, solicitada no enunciado da questão, é dada por:

$$y = x$$

5 Dificuldades para encontrar Assíntotas

5.1 Que são assíntotas?

Assíntotas são *retas* das quais o gráfico de uma função $y = f(x)$ se aproxima de tal forma que, quando estamos infinitamente longe da origem (ou seja, do ponto $(0, 0)$), o gráfico da função tende a "encostar" no gráfico da reta, sem entretanto tocar ou cruzar essa reta. Há assíntotas de três tipos:

Assíntotas horizontais: São retas horizontais (ou seja, retas do tipo $y = c$, sendo c uma constante qualquer) das quais o gráfico da função se aproxima quando nos afastamos infinitamente da origem. Como, neste caso, a variável y da reta é uma constante, para nos afastarmos infinitamente da origem nos aproximando dessa reta, a variável x da função tem de ir para $+\infty$ ou para $-\infty$.

Assíntotas verticais: São retas verticais (ou seja, retas do tipo $x = c$, sendo c uma constante qualquer) das quais o gráfico da função se aproxima quando nos afastamos infinitamente da origem. Como, neste caso, a variável x da reta é uma constante, para nos afastarmos infinitamente da origem nos aproximando desta reta, a variável y da função tem de ir para $+\infty$ ou para $-\infty$ quando a sua variável x se aproxima daquele valor c.

Assíntotas oblíquas: São retas oblíquas (nem verticais nem horizontais) das quais o gráfico da função se aproxima quando nos afastamos infinitamente da origem. Neste caso, tanto a variável x quanto a variável y da função crescem arbitrariamente em módulo, enquanto o gráfico da função se aproxima do gráfico da reta.

No caso da disciplina de Cálculo I, damos maior ênfase ao aprendizado dos primeiros dois casos (assíntota horizontal e assíntota vertical). A discussão a seguir aborda, portanto, apenas esses dois casos.

5.2 Uma assíntota pode tocar o gráfico da função?

É comum a confusão de se imaginar que uma reta assíntota, para ser assíntota, não possa nunca tocar o gráfico da função que ela aproxima assintoticamente. Essa confusão decorre até mesmo do nome *assíntota*, que significa "sem tocar". Na realidade, o conceito de *assíntota* está relacionado a um comportamento do gráfico da função *no infinito*. O que esse gráfico faz em pontos localizados a uma distância finita da origem é irrelevante para a análise de assíntotas.

Assim, examinemos por exemplo a função $y = xe^{-x}$. Quando $x = 0$, temos que $y = 0$, ou seja, o gráfico da função toca a reta $y = 0$. Entretanto, calculando o limite de y quando $x \to +\infty$, podemos observar que y novamente se aproxima de 0, ou seja, o gráfico da função se aproxima do gráfico da reta $y = 0$, desta vez sem nunca tocar essa reta, para nenhum outro valor de x. Examinemos os requisitos para a função ter como assíntota a reta $y = 0$:

- Quando nos afastamos infinitamente da origem, fazendo $x \to +\infty$, a variável y tem o comportamento $y \to 0$. Ou seja, a função y tende a "encostar" na reta $y = 0$;

- Quando nos afastamos infinitamente da origem, fazendo $x \to +\infty$, a variável y não toca ou cruza a reta $y = 0$. (O oposto desse comportamento pode ser observado, por exemplo, na função $y = e^{-x}\operatorname{sen}(x)$, que também se aproxima da reta $y = 0$ quando $x \to +\infty$, entretanto agora cruzando infinitas vezes essa reta à medida em que x vai para infinito).

Como os dois requisitos estão satisfeitos, então a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal de $y = xe^{-x}$, mesmo existindo um ponto no qual a reta efetivamente toca o gráfico da função.

5.3 Que não são assíntotas?

Algumas confusões são muito comuns. Vamos discutir as mais frequentes:

(a) O aluno pensa, às vezes, que a assíntota é um número. Por exemplo, o professor pergunta qual é a assíntota horizontal de uma função, e o aluno responde que a assíntota é 4 (ou 27, ou outro número qualquer). *O que há de errado nisso?* O erro é que uma assíntota é uma *reta*. A resposta, no caso de uma assíntota horizontal, teria de ser por exemplo que a assíntota é a *reta* $y = 4$ (ou $y = 27$, ou y igual a algum outro número).

(b) O aluno às vezes confunde o conceito de *reta tangente* com o de *assíntota*. Por exemplo, quando perguntado para dizer se a função $y = x^2$ teria uma assíntota horizontal, o aluno às vezes responde que sim, dizendo que a reta $y = 0$ seria uma assíntota horizontal.
O que há de errado nisso? O erro é que o gráfico da função $y = x^2$ não se aproxima do gráfico da reta $y = 0$ nem quando x se aproxima de $+\infty$ nem quando x se aproxima de $-\infty$. O aluno provavelmente se confundiu ao constatar que o gráfico de $y = x^2$ tem como tangente horizontal a reta $y = 0$, confundindo os dois conceitos. Deve-se notar que o gráfico da função $y = x^2$ não apenas se aproxima do gráfico da reta $y = 0$, mas até mesmo toca essa reta quando $x = 0$; isso não quer dizer que a reta $y = 0$ seja assíntota de $y = x^2$, pois quando nos afastamos infinitamente da origem, o gráfico da função e o gráfico da reta se distanciam infinitamente.

5.4 Como calcular assíntotas?

O roteiro de cálculo das assíntotas é:

Assíntotas horizontais: Calculamos o limite da função $f(x)$ quando a variável vai para $+\infty$ **e também** quando a variável vai para $-\infty$. Se um dos dois limites der igual a uma constante c, então a reta $y = c$ será assíntota horizontal.

Assíntotas verticais: Primeiro devemos localizar um ponto $x = c$ em que a função $y = f(x)$ é *descontínua*. Tendo localizado esse ponto, calculamos o limite da função $f(x)$ quando x se aproxima desse ponto. Se esse limite der $+\infty$ ou $-\infty$, então a reta $x = c$ será uma assíntota vertical da função.

5.5 Erros frequentes na determinação de assíntotas

Alguns erros aparecem muitas vezes, no cálculo de assíntotas:

(a) Muitas vezes o aluno vai tentar descobrir se uma função possui assíntota horizontal, porém ele testa apenas o limite quando x vai para $+\infty$. Assim, ele deixa de identificar a presença de assíntotas quando o comportamento assintótico ocorre para valores negativos. Por exemplo, a função $y = e^x$ possui como assíntota horizontal a reta $y = 0$. O aluno só consegue identificar essa assíntota se ele faz $x \to -\infty$, pois quando x tende a $+\infty$, a função também vai para $+\infty$, ou seja, o gráfico da função se aproxima da reta $y = 0$ quando x vai para $-\infty$, porém se afasta dessa reta quando x vai para $+\infty$.

(b) Ocorre muitas vezes que, quando perguntado se uma função teria assíntota vertical, o aluno simplesmente procura se a função possui algum ponto de descontinuidade. Ao achar um ponto de descontinuidade $x = c$, o aluno já passa a afirmar que a reta $x = c$ seria uma assíntota vertical. *O que há de errado nisso?* O problema aqui é que a função $y = f(x)$ talvez não se aproxime de infinito quando x se aproximar de c. Nesse caso, a reta $y = c$ não seria assíntota vertical. Um exemplo de situação assim ocorre na função $y = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$. É claro que a função é descontínua em $x = 0$. Entretanto, a função y não tende a infinito quando x tende a 0 (os alunos são convidados a verificar esse fato).

5.6 Uma lenda sobre assíntotas verticais

Uma lenda surpreendentemente disseminada entre os alunos, relacionada com a determinação de assíntotas verticais da função $y = f(x)$, é a de que para calcular essas assíntotas bastaria calcular o limite de $f(x)$ quando $x \to 0$. Não se sabe a origem dessa lenda, mas isso não faz qualquer sentido.

Alertamos aos alunos: tudo o que é ensinado em Cálculo I possui uma lógica, e o importante no curso é exatamente o aprendizado dessa lógica. Quando vocês flagrarem a si mesmos fazendo contas (tais como o cálculo desse limite) que vocês não tiverem a mínima idéia do que significam, dêm uma parada e procurem ajuda. Cálculo I NÃO É um conjunto de "receitas de bolo" que devem ser "decoradas". Entender a matéria NÃO É sinônimo de saber fazer um punhado de contas cegamente.

6 Dificuldades com a Regra de L'Hôpital

A regra de L'Hôpital para cálculo de limites envolvendo indeterminações pode ser enunciada como:

- Você necessita calcular um limite do tipo $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, ou seja, um limite envolvendo uma fração, com uma função no numerador e outra função no denominador.

- Se, ao tentar calcular esse limite, você descobrir que o limite tanto da função $f(x)$ (que está no numerador) quanto da função $g(x)$ (que está no denominador) tenderem para 0 (simultaneamente) ou para ∞ ou $-\infty$ (também simultaneamente), nesse caso se aplica a regra de L'Hôpital, pois ocorreu uma *indeterminação* do tipo $\frac{0}{0}$ ou do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. *Em nenhum outro caso, a regra se aplica.*

- Tendo determinado que a regra de L'Hôpital é aplicável, faz-se a transformação:
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
ou seja, deriva-se a função $f(x)$, obtendo-se $f'(x)$, deriva-se $g(x)$, obtendo-se $g'(x)$, e monta-se uma nova fração $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, cujo limite é igual ao limite que se deseja calcular.

6.1 Erros frequentes na aplicação da regra de L'Hôpital

Os seguintes erros se verificam com grande regularidade:

(a) O aluno pensa que deve derivar a fração $\frac{f(x)}{g(x)}$, e não cada uma das funções $f(x)$ e $g(x)$ separadamente. A conta fica muito mais complicada, claro, além de ficar errada. Então, atenção: (i) derive $f(x)$, obtendo $f'(x)$; (ii) depois derive $g(x)$, obtendo $g'(x)$; (iii) monte então a fração $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, e calcule o limite dessa nova fração.

(b) O aluno muitas vezes pensa que a regra de L'Hôpital é um "simplificador universal" para o cálculo de limites quaisquer, e sai derivando a função cujo limite se deseja calcular, sem sequer verificar se a regra de L'Hôpital se aplica. Então, repetindo, deve-se primeiro ver se:

  - A expressão cuja derivada se deseja calcular está na forma de uma fração de duas funções: $\frac{f(x)}{g(x)}$. Se não estiver, a regra não pode ser aplicada.
  - A expressão cuja derivada se deseja calcular recai em uma das duas indeterminações: $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Se não recair em nenhum desses dois casos, a regra também não pode ser aplicada.

(c) Um caso particular do erro anterior, que destacamos aqui devido à grande frequência com que ocorre, é quando deve-se encontrar o limite de uma expressão do tipo:

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)].$$

Essa expressão recai em uma *indeterminação* quando se obtém como resultado algo parecido com $\infty - \infty$. É muitíssimo comum o aluno, chegando nesse ponto, proceder simplesmente calculando as derivadas de $f(x)$ e de $g(x)$, tentando a seguir calcular o limite: $\lim_{x\to a}[f'(x) - g'(x)]$. Isso está completamente errado!
O quê deveria ser feito, então? O procedimento correto seria tentar manipular a expressão de forma a que apareça alguma nova expressão na forma de uma fração com indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, para as quais a regra de L'Hôpital se aplica. Por exemplo, às vezes dá certo fazer algo como:

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a}\left[f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)\right]$$

(d) Por fim, chamamos a atenção para um erro que tende a confundir o aluno que está "quase" entendendo como aplicar a regra de L'Hôpital. O erro é assim: o aluno encontra um problema de cálculo de limite em que ele nota que é evidente que ocorre uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Pensando que basta ele "perceber" que pode-se aplicar a regra de L'Hôpital, o aluno então a aplica e chega ao resultado correto no cálculo do limite, ficando muito surpreso quando recebe nota zero na questão. *Qual foi o problema aqui?* O problema é que o aluno tem de indicar que ele encontrou uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, como fundamento para poder aplicar a regra de L'Hôpital. Se ele não escreve isso na prova, sua resposta fica igual à de um outro aluno que simplesmente *não sabe* que é preciso verificar a existência desse tipo de indeterminação para poder aplicar a regra, e que vai aplicando as contas indiscriminadamente, quando se pode fazer isso, e também quando não se pode.